ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LIENPHONE CHEUCHOUTHOR

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LIENPHONE CHEUCHOUTHOR

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

Thái Nguyên - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2016

Người viết luận văn

LIENPHONE CHEUCHOUTHOR

Mục lục

Mở đầu

Nhiều vấn đề của toán học, cơ học, vật lý đã dẫn đến những phương trình trong đó hàm chưa biết ở dưới dấu tích phân. Những phương trình ấy gọi là phương trình tích phân. Phương trình tích phân là một trong những công cụ toán học hữu ích được dùng trong toán học lý thuyết và giải tích ứng dụng.

Phương trình tích phân hoặc phương trình Fredhom loại một là phương trình có dạng:

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)\,dy, \quad a < x < b,$$

trong đó $f(x)$,$K(x,y)$ là những hàm cho trước. Nếu $\phi(x)$ là hàm chưa biết có mặt ở cả trong và ngoài dấu tích phân thì phương trình tích phân ấy được gọi là phương trình Fredhom loại hai:

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)\,dy + f(x), \quad a < x < b.$$

Nếu cận dưới của tích phân là hữu hạn thì phương trình ấy gọi là phương trình Volterra loại một và loại hai tương ứng có dạng:

$$f(x) = \int_a^x K(x,y)\phi(y)\,dy, \quad a < x < b.$$

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,y)\phi(y)\,dy + f(x), \quad a < x < b.$$

Phương trình tích phân là một trong những công cụ toán học hữu ích nhất được sử dụng giải tích lý thuyết và giải tích ứngs dụng. Đặc biệt nó còn giúp ích cho việc học tập, nghiên cứu và giảng dạy ở các trường cao đẳng và đại học.

Trong chương trình Toán ở bậc đại học, tôi đã được các thầy, cô giáo giới thiệu về phương trình tích phân và vai trò của nó đối với bộ môn toán học. Sau khi được nghe các thầy cô giới thiệu tôi thấy phần phương trình tích phân rất quan trọng. Với tầm quan trọng đó cùng với sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của các thầy, cô giáo trong Bộ môn giải tích tôi đã chọn đề tài: "**Phương trình tích phân**" làm luận văn tốt nghiệp.

Qua luận văn này tôi muốn nghiên cứu một số lý thuyết cơ bản của phương trình tích phân.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian L^p, không gian Hilbert và các toán tử trong không gian Hilbert như: toán tử liên hợp, toán tử đối xứng, toán tử hoàn toàn liên tục, toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục. Đây là những kiến thức cần thiết chuẩn bị cho chương 2 của luận văn.

Chương 2: Đây là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi đã trình bày một số kiến thức cơ bản về phương trình tích phân như: toán tử tích phân, phân loại các phương trình tích phân, phương trình tích phân với hạch đối xứng, phương trình tích phân với hạch suy biến, phương trình tích phân với hạch bất kỳ, các định lý Fredhom và phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Nguyễn Thị Ngân. Nhân dịp này cho phép được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn này.

Trong quá trình thực hiện luận văn, tôi nhận được rất nhiều sự giúp đỡ động viên của các thầy, cô trong khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và các bạn học viên cao học. Tôi xin được bày tỏ

lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đã giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập rèn luyện tại Khoa, Trường.

Cuối cùng do kinh nghiệm nghiên cứu khoa học còn hạn chế nên luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được những ý kiến chỉ bảo, đóng góp của các thầy, cô giáo và các bạn học viên cao học để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số kiến thức cơ bản về không gian L^p

Định nghĩa 1.1. [2],[3] Cho (X, M, μ) là một không gian độ đo, trong đó X là không gian, M là một σ-đại số các tập con của X, μ là một độ đo trên M. Cho p$\in [1; +\infty)$ là một số thực. Họ tất cả các hàm số f(x) có lũy thừa bậc p khả tích trên X gọi là *không gian* $L^p(X, \mu)$.

Như vậy

$$L^p(X,\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \int\limits_x |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Khi X là tập đo được theo nghĩa Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$ và μ là độ đo Lebegsue thì ta viết $L^p(X)$ thay cho $L^p(X, \mu)$.

Với $p = \infty$, ký hiệu

$$L^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | ess\, sup|f(x)| < +\infty\}.$$

trong đó

$$ess \sup_{x\in X} |f(x)| = inf\{M > 0|\mu\{x \in X||f(x)| > M\} = 0\}.$$

Mệnh đề 1.1. $[2]$, $[3]$ *Tập hợp* $L^p(X, \mu)$, *với các phép toán thông thường trên hàm số, với chuẩn xác định bởi*

$$\|f\,(x)\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ với mỗi } f \in L^p\,(X,\mu)$$

là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Chứng minh. Dễ thấy rằng, với mọi $f, g \in L^p(X, \mu)$, với mọi $k \in K$, ta có $|f + g| \leq 2max\{|f|, |g|\}$.

Từ đó, suy ra

$$|f+g|^p \leq 2^p max\{|f|^p, |g|^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right).$$

Vậy $f + g \in L^p(X, \mu)$.Ngoài ra $kf \in L^p(X, \mu)$. Như vậy $L^p(X, \mu)$ đóng kín đối với các phép toán thông thường trên hàm số nên nó là một không gian tuyến tính.

Ta biết rằng, $\int\limits_X |f|^p d\mu = 0$ khi và chỉ khi $f = 0$ hầu khắp nơi trên X nên điều kiện thứ nhất của chuẩn được thỏa mãn. Điều kiện thứ hai là hiển nhiên, điều kiện tam giác được suy ra từ bất đẳng thức Minkowski.

Mệnh đề được chứng minh.

Định lý 1.1. [2] , [3] *$L^p(X, \mu)$ là không gian Banach.*

Chứng minh. Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy Cauchy trong $L^p(X, \mu)$, tức là

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0.$$

Khi đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, tồn tại một số $n_k \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $m, n \geq n_k$,

$$||f_m - f_n|| < \frac{1}{2^k}.$$

Đặc biệt

$$||f_m - f_n|| < \tfrac{1}{2^k} \text{ với mọi } n \geq n_k.$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ Khi đó

$$||f_{n+1} - f_n|| < \frac{1}{2^k}.$$

Với mọi $s \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$g_s(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{s} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(X, \mu).$$